835. Y. C. Chow:

Hilbert 及ビ Widder ノ不等式ニ就テ

(Journal London Math. Soc. 2 (1939), 151)

武隈 良一(室蘭中學)

1. $a_n \geqq 0$ ナラバ

$$(1.1)\quad \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{a_m a_n}{m+n+1} \leqq \pi \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{a_m a_n}{2^{m+n+1}} \quad \frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$

ナリ。コレハ Widder ノ不等式トシテ知ラレテ居リ、而シテ Hilbert ノ不等式ヨリ Stronger デアルコトハ Widder ノ示シタ処デアル。Chow ハ (1.1) ノ一般ノ形ヲ証明シテ居ル。

定理 A. $p>1$, $p'=\dfrac{p}{p-1}$,

$$\alpha(x) = e^{-x} \sum_0^\infty a_m \frac{x^m}{m!}$$

$$\beta(x)=e^{-x}\sum_0^\infty b_n\frac{x^n}{n!}$$

トセバ

$$\sum_0^\infty\sum_0^\infty\frac{a_m b_n}{m+n+1}\leqq\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}\left(\int_0^\infty\alpha^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty\beta^{p'}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p'}}$$

ナリ。

次ノ議論ハ Hardy ノ証明ノ中ニ一部分現ハレテ居ル。

$$A(x)=\sum_0^\infty a_m x^m,\qquad A^*(x)=\sum_0^\infty a_m\frac{x^m}{m!}$$

$$B(x)=\sum_0^\infty b_n x^n\qquad B^*(x)=\sum_0^\infty b_n\frac{x^n}{n!}$$

ト書ケバ $A(x)=\int_0 e^{-t}A^*(xt)\,dt$

$$=\int_0^\infty e^{-\frac{u}{x}}A^*(u)\,du$$

$$B(x)=\frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-\frac{u}{x}}B^*(u)\,du$$

ニシテ

$$\int_0^1 A(x)\,B(x)\,dx=\int_0^1\frac{dx}{x^2}\int_0^\infty e^{-\frac{u}{x}}A^*(u)\,du\int_0^\infty e^{-\frac{u}{x}}B^*(u)\,du$$

ナリ。今 $\frac{1}{x}=t+1$ トカキ

$$e^{-u}A^*(u)=\alpha(u),\quad e^{-u}B^*(u)=\beta(u)$$

ナルコトニ思ヲ致セバ

$$\int_0^1 A(x)\,B(x)\,dx = \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-tu}\alpha(u)\,du \int_0^\infty e^{-tu}\beta(u)\,du$$

$$= \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-tu} t^{\frac{1}{p'^2}-\frac{1}{p^2}} \alpha(u)\,du \int_0^\infty e^{-tu} t^{\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p'^2}} \beta(u)\,du.$$

ナリ。サテ

$$\int_0^\infty e^{-tu} t^{\frac{1}{p'^2}-\frac{1}{p^2}} \alpha(u)\,du$$

$$= \int_0^\infty \left(e^{-tu} u^{-\frac{1}{p'}} t^{-\frac{1}{p}} \alpha^p(u)\right)^{\frac{1}{p}} \left(e^{-tu} u^{-\frac{1}{p}} t^{\frac{1}{p'}}\right)^{\frac{1}{p'}} du$$

$$\leqq \left(\int_0^\infty e^{-tu} u^{\frac{1}{p'}} t^{-\frac{1}{p}} \alpha^p(u)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty e^{-tu} u^{-\frac{1}{p}} t^{\frac{1}{p'}} du\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$= \Gamma\left(\frac{1}{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^\infty e^{-tu} u^{\frac{1}{p'}} t^{-\frac{1}{p}} \alpha^p(u)\,du\right)^{\frac{1}{p}}$$

同様ニ $\displaystyle\int_0^\infty e^{-tu} t^{\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p'^2}} \beta(u)\,du$

$$\leqq \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty e^{-tu} u^{\frac{1}{p}} t^{-\frac{1}{p'}} \beta^{p'}(u)\,du\right)^{\frac{1}{p'}}$$

ニシテソレ故

$$\int_0^1 A(x)\,B(x)\,dx$$

$$\leqq \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \Gamma\left(\frac{1}{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \int_0^\infty dt \left(\int_0^\infty e^{-tu} u^{\frac{1}{p}} t^{-\frac{1}{p}} \alpha^p(u)\,du\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left(\int_0^\infty e^{-tu} u^{\frac{1}{p}} t^{-\frac{1}{p'}} \beta^{p'}(u)\,du\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leqq \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \Gamma\left(\frac{1}{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left[\int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-tu} u^{\frac{1}{p'}} t^{-\frac{1}{p}} \alpha^p(u)\,du\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left[\int_0^\infty dt\int_0^\infty e^{-tu}u^{\frac{1}{p'}}t^{-\frac{1}{p'}}\beta^{p'}(u)du\right]^{\frac{1}{p'}}$$

$$=\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p'}\right)\left(\int_0^\infty\alpha^p(u)du\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty\beta^{p'}(u)\,du\right)^{\frac{1}{p'}}$$

コレハ期待シテ居ッタ結果デアリ、而シテ Hilbert ノ不等式ヨリ stronger ナルコトハ次式ヲ見レバ分ル。

$$\int_0^\infty\alpha^p(x)\,dx=\int_0^\infty e^{-px}\left(\sum a_m\frac{x^m}{m!}\right)^p dx$$

$$\leqq\int_0^\infty e^{-px}\left(\sum a_n^p\frac{x^m}{m!}\right)\left(\sum\frac{x^m}{m!}\right)^{p-1}dx$$

$$=\int_0^\infty e^{-x}\left(\sum a_m^p\frac{x^m}{m!}\right)dx=\sum a_m^p$$

以上ハ Hölder ノ不等式ヨリ使用シテオラヌノデ、偶然ニモ Hilbert ノ不等式ヲヨリ鋭イ形ニ於テ始メカラ新シク証明シタコトニナッテ居ル。

2. 次ノ定理ハ Hilbert 及ビ Widder ノ不等式ニ関スル不等式ノ一般化サレタモノデアル。

定理 B. $a_n\geqq 0$, $p_1>1$, $p_2>1$, ---- $p_m>1$ ニシテ

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{p_m}=1$$

ナラバ

$$\sum_0^\infty\sum_0^\infty\cdots\cdots\sum_0^\infty\frac{a_{n_1}b_{n_2}\cdots\cdots c_{n_m}}{m^{n_1+n_2+\cdots+n_m+1}}\,\frac{(n_1+n_2+\cdots\cdots+n_m)!}{n_1!\,n_2!\cdots\cdots n_m!}$$

$$\leqq \left(\sum a_{n_1}^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\sum b_{n_2}^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \cdots\cdots \left(\sum C_{n_m}^{p_m} \right)^{\frac{1}{p_m}}$$

ナリ。

今 $\alpha(x) = e^{-x} \sum_{0}^{\infty} a_{n_1} \frac{x^{n_1}}{n_1 !}$ ………

トカケバ左辺ハ

$$\int_0^\infty \alpha(x)\, \beta(x) \cdots\cdots \gamma(x)\, dx$$

トナル。而シテ

$$\alpha(x) \leqq \left(e^{-x} \sum a_{n_1}^{p_1} \frac{x^{n_1}}{n_1 !} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(e^{-x} \sum \frac{x^{n_1}}{n_1 !} \right)^{\frac{1}{p_1'}}$$

$$= \left(e^{-x} \sum a_{n_0}^{p_1} \frac{x^{n_1}}{n_1 !} \right)^{\frac{1}{p_1}}$$

ナルヲ以テ

$$\int_0^\infty \alpha(x)\, \beta(x) \cdots\cdots \gamma(x)\, dx$$

$$\leqq \int_0^\infty \left(e^{-x} \sum a_{n_1}^{p_1} \frac{x^{n_1}}{n_1 !} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(e^{-x} \sum b_{n_2}^{p_2} \frac{x^{n_2}}{n_2 !} \right)^{\frac{1}{p_2}} \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \left(e^{-x} \sum C_{n_m}^{p_m} \frac{x^{n_m}}{n_m !} \right)^{\frac{1}{p^m}} dx$$

$$\leqq \left[\int_0^\infty \left(e^{-x} \sum a_{n_1}^{p_1} \frac{x^{n_1}}{n_1 !} \right) dx \right]^{\frac{1}{p'}} \left[\int_0^\infty \left(e^{-x} \sum b_{n_2}^{p_2} \frac{x^{n_2}}{n_2 !} \right) dx \right]^{\frac{1}{p_2}}$$

$$\cdots\cdots \left[\int_0^\infty \left(e^{-x} \sum C_{n_m}^{p_m} \frac{x^{n_m}}{n_m !} \right) dx \right]^{\frac{1}{p_m}}$$

$$=\left(\sum a_{n_1}^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}\left(\sum b_{n_2}^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}\cdots\cdots\left(\sum c_{n_m}^{p_m}\right)^{\frac{1}{p_m}}$$

コレ期待セル結果ナリ。（以上ノ chow ノ論文ナリ）

あとがき（紹介者ノ補遺）

Hilbert ノ不等式ト云フノハ

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}\frac{a_m a_n}{m+n+1}\leqq\pi\sum_{n=0}^{N}a_n^2$$

デアッテ積分方程式ノ理論研究ニ於テ，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収斂スレバ $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m\ a_n}{m+n}$ モ亦収斂スルトイフ事実ニ基イテ居ルノデアル。Widder ハヨリ stronger ナ不等式トシテ次ノモノヲ 1929 年ニ発表シタ。

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}\frac{a_m a_n}{m+n+1}\leqq\pi\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}\frac{(m+n)!}{m!\ n!}\ \frac{a_m a_n}{2^{m+n+1}}$$

Hardy ハ同ジ年ニコレヲ実解析學ノ立場カラ論ジ，之ヲ次ノ如ク拡張シタ．

定理

$$a_n\geqq 0,\ A(z)=\sum a_n z^n,\ A^*(z)=\sum\frac{a_n z^n}{n!}$$

ナラバ

$$\int_0^1\{A(z)\}^2 dz\leqq\pi\int_0^{\infty}\left\{e^{-z}A^*(z)\right\}^2 dz$$

ナリ．茲ニ π ハ最良値ニシテ等号ハ a_n が全部零ナルトキニ限ル。

定理. $p>1$ ナラバ

$$\int_0^1 z^{p-2}\{A(z)\}^p dz \leqq \left\{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right\}^p \int_0^\infty z^{p-2}\{e^{-z}A^*(z)\}^p dz.$$

最後ニ A. E. Ingham ハ 1936 年次ノ注意ヲ與ヘテ居ルコトヲ示シ拙イペンヲオクコトヽスル。

定理 $a_n \geqq 0$, $0<\sum_0^\infty a_n^2<\infty$, $\lambda>0$

トセバ

$$\sum_{m,n=0}^\infty \frac{a_m+a_n}{m+n+\lambda} \leqq M(\lambda)\sum_{n=0}^\infty a_n^2$$

ナリ。茲ニ

$$M(\lambda)=\frac{\pi}{\sin\lambda\pi} \quad \left(0<\lambda\leqq\frac{1}{2}\right)$$

$$M(\lambda)=M\left(\frac{1}{2}\right)=\pi \quad \left(\lambda>\frac{1}{2}\right)$$

等号ハ $0<\lambda<\frac{1}{2}$ ノトキ成立スルガ,

$0\geqq\frac{1}{2}$ ノトキ成立シナイ。